Exercice N°1 (5 points)

NB : Les questions 1/, 2/, 3/ , 4/ et 5/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ Résoudre dans C l'équation: $z^3 - i = 6(z + i)$

2/ a) Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes modulo 7 de 3^n .

b) Pour tou $n \in IN^*$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$.

Déterminer les valeurs de n pour les quelles U_n est divisible par 7.

3/ Soit U et V les suites définies par : $U_0 = 0$, $V_0 = 1$ et $\begin{cases} U_{n+1} = -5U_n + 3V_n \\ V_{n+1} = -6U_n + 4V_n \end{cases}$

On pose $W_n = V_n - U_n$ et $t_n = U_n - 1$

a) Quelle est la nature de la suite W ?

b) Montrer que la suite t est géométrique.

c) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

4/ Soit (U_n) une suite définie sur IN, à termes strictement négatifs et vérifiant pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n}$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

5/ On se propose de résoudre dans IN léquation (E): $5^n + 2^n = 4^n + 3^n$

a) Vérifier que 0 et 1 sont des solutions de (E).

On suppose dans la suite que $n \geq 2$.

b) Déterminer le reste modulo 4 de $5^n + 2^n$ et en déduire que si n est solution de (E) alors n est pair.

c) Pour n pair, déterminer le reste modulo 3 de $5^n + 2^n$ et en déduire que l'équation (E) n'a pas de solution supérieur ou égal à 2.

Exercice N°2 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) On donne $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$, $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$

b) On donne les points A(1), B(j) et C(j^2) . Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

2) Désignons par I = B*C, K = B*A et L = A*C

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la symétrie glissante f qui envoie B en C et K en I.

b) On pose $\varphi = f^{-1} \circ S_{(AC)}$. Montrer que φ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

3) On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites (OA), (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, On pose : $M_1 = S_1(M)$, $M_2 = S_2(M)$ et $M_3 = S_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne ror)

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O.

4) Soit M un point quelconque du plan P, d'affixe z non nul.

Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

5) Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC).

a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$

b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1-\bar{z}$

6) a) Montrer que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1+j^2\bar{z}}{j^2\bar{z}-j\bar{z}}$ est réel.

b) Déduire l'ensemble des points M tels que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés.

Exercice N°3 (3points)

Pour tout entier premier $p \geq 3$, on note $A_p = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

On admet que pour tout $a \in A_p$, il existe un unique $y \in A_p$ tel que: $ay \equiv 1 \pmod{p}$

1) Dans cette question on prend $p = 7$.

a) Recopier puis compléter le tableau suivant:

a	1	2	3	4	5	6
y						

b) Pour tout entier x, montrer que: $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$

c) Résoudre dans Z l'équation: $3x \equiv 2 \pmod{7}$

2) Dans cette question on prend $p = 31$.

a) Déterminer y pour $a = 2$ et $a = 3$.

b) Résoudre dans Z chacune des équations: $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$

c) En déduire la résolution dans Z de l'équation: $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$

Exercice N°4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

I/ 1/a) Montrer que f est continue sur $]0,1]$.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$.

2/ a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

b)Tracer dans un repère orthonormé du plan les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ (Unité : 2cm) .

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in IR_+$.

II/ On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Soit G une fonction définie et dérivable sur IR et vérifiant : $G(0) = 0$ et $G'(x) = g(x)$.

1/ Montrer que G est strictement croissante sur IR.

En déduire que G est une bijection de IR sur G(IR) .

2/ On pose $h(x) = G(x) + G(-x)$.

Montrer que h est dérivable sur IR et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in IR$.

En déduire que G est impaire .

3/ On pose pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = G(\tan x) - x$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G(\tan x) = x$.

c) Calculer G(1)

d) Montrer que $G(IR) = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4/ On pose pour tout $x \in IR_+$, $k(x) = G\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + G\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

a) Montrer que k est dérivable sur IR_+ et déterminer $k'(x)$.

b) Montrer alors que $G\left(\dfrac{1}{2}\right) + G\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$